



TITLE:

# 関数微分方程式における比較定理 (関数微分方程式)

AUTHOR(S):

草野, 尚; 内藤, 学

---

CITATION:

草野, 尚 ...[et al]. 関数微分方程式における比較定理 (関数微分方程式).  
数理解析研究所講究録 1980, 379: 42-59

ISSUE DATE:

1980-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104789>

RIGHT:

関数微分方程式における比較定理

広大 理

草野 尚

内藤 学

§1. 序. 関数微分方程式

$$(L_n^+, F, g) \quad L_n x(t) + F(t, x(g(t))) = 0$$

$$(L_n^-, F, g) \quad L_n x(t) - F(t, x(g(t))) = 0$$

$$(L_n^\pm, F, g) \quad L_n x(t) + (-1)^{n+1} F(t, x(g(t))) = 0$$

を考える。ここに  $L_n$  は次の形の微分作用素である：

$$(1) \quad L_n = \frac{1}{p_n(t)} \frac{d}{dt} \frac{1}{p_{n-1}(t)} \frac{d}{dt} \cdots \frac{d}{dt} \frac{1}{p_1(t)} \frac{d}{dt} \frac{1}{p_0(t)}$$

仮定は次の通り：

(L-1)  $p_i: [a, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $0 \leq i \leq n$ , は連続,

$$\int_a^\infty p_i(t) dt = \infty, \quad 1 \leq i \leq n-1;$$

(L-2)  $g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  は連続,  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ ;

(L-3)  $F: [a, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は連続,  $F(t, x)$  は  $x$  に関して単調非減少,  $x F(t, x) > 0$  ( $x \neq 0$ ).

関数  $x(t)$  の "quasi-derivatives" を定義する：

$$(2) \quad D^0(x; p_0)(t) = \frac{x(t)}{p_0(t)}$$

$$D^i(x; p_0, \dots, p_i)(t) = \frac{1}{p_i(t)} \frac{d}{dt} D^{i-1}(x; p_0, \dots, p_{i-1})(t), \quad 1 \leq i \leq n.$$

微分作用素  $L_n$  の domain  $\mathcal{D}(L_n)$  は, quasi-derivatives

$D^i(x; p_0, \dots, p_i)(t)$ ,  $0 \leq i \leq n$ , が存在して連続であるような関数

$x: [T_x, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  全体であるとする。以下, 方程式  $(L_n^+, F, g)$  等の解と言えは, 十分大きい  $t$  に対して方程式  $(L_n^+, F, g)$  等を満たす関数  $x \in \mathcal{D}(L_n)$  で, nontrivial なるものを意味する。勿論: のような解の存在を仮定しなければならない。

連続関数  $u: [T_u, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  が限りなく大きい零点をもつとき,  $u(t)$  は振動, 否; でないとき  $u(t)$  は非振動と呼ばれる。

補題1.  $x \in \mathcal{D}(L_n)$  が区間  $[t_0, \infty)$  上で  $x(t)L_n x(t) > 0$  [ $< 0$ ] を満足するならば, 適当な整数  $\ell \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $\ell \equiv n \pmod{2}$  [ $\ell \not\equiv n \pmod{2}$ ] と  $t_1 \geq t_0$  が存在して  $[t_1, \infty)$  上で次の不等式が成立つ:

$$(3) \quad \begin{cases} x(t) D^i(x; p_0, \dots, p_i)(t) > 0, & 0 \leq i \leq \ell, \\ (-1)^{i-\ell} x(t) D^i(x; p_0, \dots, p_i)(t) > 0, & \ell \leq i \leq n. \end{cases}$$

(3)式を満足する関数を degree  $\ell$  の関数と言ふ。方程式  $(L_n^+, F, g)$  等の degree  $\ell$  の解 (もちろん, 非振動解) 全体の集合を  $\mathcal{N}_\ell$  で表わす。非振動解の全体の集合を  $\mathcal{N}$  とする。

定義. 方程式  $(L_n^+, F, g)$  が性質  $A$  を持つとは, この方程式

に対して

$n$  が偶数ならば  $N = \phi$ ,  $n$  が奇数ならば  $N = N_0$

が成立することを言う。

方程式  $(L_n^-, F, g)$  が性質  $B$  を持つとは、この方程式に対して

$n$  が偶数ならば  $N = N_0 \cup N_n$ ,  $n$  が奇数ならば  $N = N_n$

が成立することを言う。

また、方程式  $(L_n^+, F, g)$  に対して、 $N_0 = \phi$  するとき、この方程式は性質  $C$  を持つと言う。

本稿の目的は、方程式  $(L_n^+, F, g)$ ,  $(L_n^-, F, g)$ ,  $(L_n^{\pm}, F, g)$  に対する性質  $A$ ,  $B$ ,  $C$  と他の方程式

$$(M_n^+, G, h) \quad M_n x(t) + G(t, x(h(t))) = 0$$

$$(M_n^-, G, h) \quad M_n x(t) - G(t, x(h(t))) = 0$$

$$(M_n^{\pm}, G, h) \quad M_n x(t) + (-1)^{n+1} G(t, x(h(t))) = 0$$

に対する性質  $A$ ,  $B$ ,  $C$  との関連を調べることにあつた。こ

で  $M_n$  は

$$(4) \quad M_n = \frac{1}{q_n(t)} \frac{d}{dt} \frac{1}{q_{n-1}(t)} \frac{d}{dt} \cdots \frac{d}{dt} \frac{1}{q_1(t)} \frac{d}{dt} \frac{1}{q_0(t)}$$

の形の微分作用素で、次の条件が満たされると仮定する：

(M-1)  $q_i : [a, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $0 \leq i \leq n$ , は連続

$$\int_a^{\infty} q_i(t) dt = \infty, \quad 1 \leq i \leq n-1;$$

(M-2)  $h : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  は連続,  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$ ;

(M-3)  $G : [a, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は連続,  $G(t, x)$  は  $x$  に関して単

調非減少,  $\lambda G(t, x) > 0$  ( $\lambda \neq 0$ ).

## §2. 補題

$t, s \in [a, \infty)$ ,  $i_k \in \{1, \dots, n-1\}$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ) に対して

$$(5) \begin{cases} I_0 = 1 \\ I_k(t, s; p_{i_1}, \dots, p_{i_k}) = \int_s^t p_{i_1}(r) I_{k-1}(r, s; p_{i_2}, \dots, p_{i_k}) dr \end{cases}$$

とおく. また,  $0 \leq k \leq n-1$  に対して

$$J_k(t, s) = p_0(t) I_k(t, s; p_1, \dots, p_k), \quad K_k(t, s) = p_n(t) I_k(t, s; p_{n-1}, \dots, p_{n-k})$$

$$J_k(t) = J_k(t, a), \quad K_k(t) = K_k(t, a)$$

の記号を用いる.

補題 2.  $\alpha \in \mathcal{A}(L_n)$  ならば,  $t, s \in [T_\alpha, \infty)$ ,  $0 \leq i \leq k \leq n-1$  に対し

次の関係式が成立つ:

$$\begin{aligned} & D^i(x; p_0, \dots, p_i)(t) \\ &= \sum_{j=i}^k (-1)^{j-i} D^j(x; p_0, \dots, p_j)(s) I_{j-i}(s, t; p_j, \dots, p_{i+1}) \\ &+ (-1)^{k-i+1} \int_t^s I_{k-i}(r, t; p_k, \dots, p_{i+1}) p_{k+1}(r) D^{k+1}(x; p_0, \dots, p_{k+1})(r) dr \end{aligned}$$

補題 3. 以下  $t \geq T \Rightarrow g(t) \geq t_0 \in I$ ,  $u: [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,

$w: [T, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $H: [T, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $\Phi, \Psi: \Delta \rightarrow [0, \infty)$

( $\Delta = \{(t, s): t \geq s \geq T\}$ ) は連続関数で,  $H(t, x)$  は  $x$  に関し

て単調非減少で与ると仮定する.

$$(i) \int_T^\infty \Psi^*(t) H(t, u(g(t))) dt < \infty$$

$$(6) \quad u(t) \geq w(t) + \int_T^t \Phi(t,s) \int_s^\infty \Psi(r,s) H(r, u(g(r))) dr ds, \quad t \geq T,$$

とする. このとき  $\Psi^*(t) = \max \{ \Psi(t,s) : s \in [T, t] \}$ . このとき, 積分方程式

$$v(t) = w(t) + \int_T^t \Phi(t,s) \int_s^\infty \Psi(r,s) H(r, v(g(r))) dr ds, \quad t \geq T,$$

は  $w(t) \leq v(t) \leq u(t)$ ,  $t \geq T$ , を満たす連続な解  $v(t)$  を持つ.

(ii) (i) において (6) を次式でおきかえる:

$$u(t) \geq w(t) + \int_t^\infty \Psi(s,t) H(s, u(g(s))) ds, \quad t \geq T,$$

このとき, 積分方程式

$$v(t) = w(t) + \int_t^\infty \Psi(s,t) H(s, v(g(s))) ds, \quad t \geq T,$$

は  $w(t) \leq v(t) \leq u(t)$ ,  $t \geq T$ , を満たす連続な解  $v(t)$  を持つ.

補題 4. 微分不等式

$$(i) \quad \{ L_n x(t) + F(t, x(g(t))) \} \operatorname{sgn} x(t) \leq 0$$

を満たす degree  $\ell$  ( $1 \leq \ell \leq n-1$ ) の関数  $x \in \mathcal{A}(L_n)$  が存在すれば, 微分方程式  $(L_n^+, F, g)$  の degree  $\ell$  の解が存在する.

(ii) 微分不等式

$$\{ L_n x(t) - F(t, x(g(t))) \} \operatorname{sgn} x(t) \geq 0$$

を満たす degree  $\ell$  ( $1 \leq \ell \leq n-1$ ) の関数  $x \in \mathcal{A}(L_n)$  が存在すれば, 微分方程式  $(L_n^-, F, g)$  の degree  $\ell$  の解が存在する.

補題 5.  $i$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ) を固定する. 方程式  $(L_n^+, F, g)$

$[(L_n^-, F, g)]$  の  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{J_i(t)} = a_i \in \mathbb{R} - \{0\}$  なる非振動解を持つ

ための必要十分条件は, ある定数  $c \in \mathbb{R} - \{0\}$  に対して

$$\int_0^\infty K_{n-i-1}(t) |F(t, c J_i(g(t)))| dt < \infty$$

が成立することである。

補題 3, 4 については Kusano and Naito [9] を, 補題 5 については Kitamura and Kusano [5] を参照されたい。

### §3. Sturm 型の比較定理

定理 1. 次の条件を仮定する:

$$g(t) \geq h(t)$$

$$p_0(g(t)) \geq q_0(h(t))$$

$$p_i(t) \geq q_i(t), \quad 1 \leq i \leq n$$

$$F(t, x) \operatorname{sgn} x \geq G(t, x) \operatorname{sgn} x$$

(i)  $(M_n^+, G, h)$  が性質 A を持つば,  $(L_n^+, F, g)$  も性質 A を持つ。

(ii)  $(M_n^-, G, h)$  が性質 B を持つば,  $(L_n^-, F, g)$  も性質 B を持つ。

証明の要らまじ。結論を否定すれば,  $(L_n^+, F, g)$  または  $(L_n^-, F, g)$  は degree  $l$  ( $1 \leq l \leq n-1$ ) の非振動解  $x(t)$  を持つ。この  $x(t)$  は正と仮定してよい。補題 2 を用いると, 十分大きい  $t$ , に対して次の不等式が成立, こゝから示される:

$$D^0(x; p_0)(t) \geq c + \int_{t_1}^t I_{n-l-1}(t, s; p_1, \dots, p_{l-1}) p_l(s) \cdot$$

$$\cdot \int_s^\infty I_{n-l-1}(r, s; p_{n-l}, \dots, p_{l+1}) p_n(r) F(r, p_0(g(r)) D^0(x; p_0)(g(r))) dr ds, \quad t \geq t_1,$$

こゝで  $c$  は正の定数である。定理の仮定を用いて, この不等

式から

$$D^0(x; p_0)(t) \geq c + \int_{t_1}^t I_{l-1}(t, s; q_1, \dots, q_{l-1}) q_l(s) \cdot$$

$$\cdot \int_s^\infty I_{n-l-1}(r, s; q_{n-1}, \dots, q_{l+1}) q_n(r) G(r, q_0(h(r)) D^0(x; p_0)(h(r))) dr ds, \quad t \geq t_1,$$

を導く。ここで補題3の(i)を適用すれば、積分方程式

$$y(t) = c + \int_{t_1}^t I_{l-1}(t, s; q_1, \dots, q_{l-1}) q_l(s) \cdot$$

$$\cdot \int_s^\infty I_{n-l-1}(r, s; q_{n-1}, \dots, q_{l+1}) q_n(r) G(r, q_0(h(r)) y(h(r))) dr ds, \quad t \geq t_1,$$

が正の解  $y(t)$  を持つことが分る。  $z(t) = q_0(t)y(t)$  とおけば、  $z(t)$  は方程式  $(M_n^+, G, h)$  または  $(M_n^-, G, h)$  の degree  $l$  の解になる。しかしこれは仮定に反して矛盾。 //

定理1 では  $\int_a^\infty p_i(t) dt = \int_a^\infty q_i(t) dt = \infty$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) と仮定した。

この条件が満たされないとき、定理1の結論は成立しないこと、次の例で示される。

例1. 方程式

$$(7) \quad (t^3 x'(t))' + t^3 x^3(t) = 0, \quad t \geq 1,$$

$$(8) \quad (t^3 x'(t))' + t^3 x^3(t^{\frac{1}{3}}) = 0, \quad t \geq 1,$$

を考える。方程式(8)は振動である。(すべての解が振動であると言うこと。) (しかし方程式(7)は非振動解  $x(t) = \frac{1}{t}$  を持つ。

このような一般の場合の比較定理として次を挙げる。



定理2.  $F(t, x) \operatorname{sgn} x \geq G(t, x) \operatorname{sgn} x$  と仮定する。

(i)  $(L_n^+, G, g)$  が性質 A を持つば,  $(L_n^+, F, g)$  も性質 A を持つ。

(ii)  $(L_n^-, G, g)$  が性質 B を持つば,  $(L_n^-, F, g)$  も性質 B を持つ。

#### §4. 線型方程式と非線型方程式の比較

##### 線型方程式

$$(L^+) \quad L_n x(t) + \lambda d(t) x(g(t)) = 0$$

$$(L^-) \quad L_n x(t) - \lambda d(t) x(g(t)) = 0$$

に対する性質 A, B と非線型方程式

$$(LN^+) \quad L_n x(t) + \mu d(t) F(x(g(t))) = 0$$

$$(LN^-) \quad L_n x(t) - \mu d(t) F(x(g(t))) = 0$$

に対する性質 A, B を比較する簡単な原理を紹介する。

定理3.  $d: [a, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  は連続,  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は連続で

$\lambda F(x) > 0$  ( $\lambda \neq 0$ ) とする。さらに,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|F(x)|}{|x|} = \infty$$

と仮定する。  $\liminf_{t \rightarrow \infty} p_0(t) > 0$  とする。

(i) ある正数  $\lambda > 0$  に対して  $(L^+)$  が性質 A を持つば, 任意の正数  $\mu$  に対して  $(LN^+)$  は性質 A を持つ。

(ii) ある正数  $\lambda > 0$  に対して  $(L^-)$  が性質 B を持つば, 任意の正数  $\mu$  に対して  $(LN^-)$  は性質 B を持つ。

(i) の証明の要らましを述べる。ある  $\mu > 0$  に対して  $(LN^+)$

が性質  $A$  を持たないとは定すれば,  $(LN^+)$  は degree  $l$  ( $1 \leq l \leq n-1$ ) の非振動解  $x(t)$  を持つ。  $t$  が十分大ならば  $x(t) > 0$  と仮定してよい。  $\lim_{t \rightarrow \infty} D^0(x; p_0)(t) = \infty$  が成立つ。 実際,  $n$  が奇数ならば,  $l$  は 2 以上の偶数であるから, これは明らか。  $n$  が偶数とする。  $l=1$  の場合だけを吟味すればよい。  $t \leq$

$\lim_{t \rightarrow \infty} D^0(x; p_0)(t)$  が有限ならば, 補題 5 によって

$$\int_0^\infty K_{n-1}(t) d(t) F(c p_0(g(t))) dt < \infty$$

となるような正の定数  $c > 0$  が存在する。 この不等式は

$$\int_0^\infty K_{n-1}(t) d(t) p_0(g(t)) dt < \infty$$

と導くことに注意すると, 再び補題 5 によって, 線型方程式  $(L^+)$  が正の非振動解を持つこと

になり, 仮定に反する。 従って  $\lim_{t \rightarrow \infty} D^0(x; p_0)(t) = \infty$ 。  $p_0(t)$  に対する仮定から,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$  が出る。 この事実と  $F(x)$  に対する

仮定から,  $T$  が十分大ならば,  $t \geq T$  において  $F(x(g(t))) \geq \frac{\lambda}{\mu} x(g(t))$  が成立つことが分る。 これを  $(LN^+)$  に持ち込めば,

$$L_n x(t) + \lambda d(t) x(g(t)) \leq 0, \quad t \geq T.$$

が得られる。 ここで補題 4 の (i) を用いると, 方程式  $(L^+)$  に degree  $l$  の解が存在するという結論に達する。 これは矛盾である。 //

例 2. 常微分方程式

$$(t^{d+m} x^{(m)}(t))^{(m)} + \lambda t^{d-m} x(t) = 0, \quad t \geq 1,$$

を考える。  $\alpha \neq \lambda > 0$  は定数で  $\alpha \leq -m+1$  とする。  $\lambda$  が十分大ならば、この方程式は振動である (Kusano and Naito [8] 参照)。

従って、  $g(t) \geq t$  ならば、定理 1 によって、方程式

$$(t^{\alpha+m} x^{(m)}(t))^{(m)} + \lambda t^{\alpha-m} x(g(t)) = 0, \quad t \geq 1,$$

は振動である。 従って、  $F(x)$  が定理 3 の条件を満たすならば方程式

$$(t^{\alpha+m} x^{(m)}(t))^{(m)} + \mu t^{\alpha-m} F(x(g(t))) = 0, \quad t \geq 1,$$

は任意の  $\mu > 0$  に対して振動である。 (Kreith, Kusano and Naito [7] 参照)。

## §5. 常微分方程式から遅れ型方程式へ

§<sup>3</sup> で述べた比較定理は、ある  $h(t)$  なる deviating argument を持つ方程式に対する性質 A もしくは性質 B から、  $h(t)$  より大きな deviating argument  $g(t)$  ( $g(t) \geq h(t)$ ) を持つ他の方程式に対する性質 A もしくは性質 B を導き出す原理を与えるものであった。 この方向と逆の方向を示すことは可能であろうかという問題が生じる。 以下この問に答える。

定理 4.  $g(t) \geq h(t)$ ,  $g'(t) > 0$ ,  $h'(t) > 0$  と仮定する。

(i) 方程式

$$L_n x(t) + \frac{g'(t) p_n(h^{-1}(g(t)))}{h'(h^{-1}(g(t))) p_n(t)} F(h^{-1}(g(t)), x(g(t))) = 0$$

が性質 A を持つならば、方程式

$$L_n x(t) + F(t, x(h(t))) = 0$$

は性質 A を持つ。

(ii) 方程式

$$L_n x(t) - \frac{g'(t) p_n(h^{-1}(g(t)))}{h'(h^{-1}(g(t))) p_n(t)} F(h^{-1}(g(t)), x(g(t))) = 0$$

が性質 B を持つならば、方程式

$$L_n x(t) - F(t, x(h(t))) = 0$$

は性質 B を持つ。

注意. 特に  $g(t) \equiv t$  の場合, 常微分方程式に対する性質 A もしくは性質 B を知って, 遅れ型微分方程式に対する性質 A もしくは性質 B を示す原理になっている。

例 3. 定理 4 によれば, 常微分方程式

$$(9) \quad D^n(x; 1, p, \dots, p, 1)(t) + \frac{\alpha(h^{-1}(t))}{h'(h^{-1}(t))} x(t) = 0$$

が性質 A を持つとは, 遅れ型方程式

$$(10) \quad D^n(x; 1, p, \dots, p, 1)(t) + \alpha(t) x(h(t)) = 0$$

は性質 A を持つ. ここで  $\alpha, p: [a, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  は連続で

$\int_a^\infty p(t) dt = \infty$  とする. Kusano and Naito [8] の結果によれば,

(9) は以下の条件の下で性質 A を持つ:  $P(t) = \int_a^t p(s) ds$  とおく,

$$(a) \quad \int_a^\infty [P(h(t))]^{n-2} \alpha(t) dt = \infty; \quad \text{または}$$

$$(b) \quad \int_a^\infty [P(h(t))]^{n-2} \alpha(t) dt < \infty \quad \text{かつ}$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} P(h(t)) \int_t^{\infty} [P(h(s)) - P(h(t))]^{\alpha(s)} ds > \frac{(n-2)!}{4}.$$

従って (a) または (b) が成立するとき、遅れ型方程式 (10) は性質 A を持つ。

定理 5.  $g(t) \geq h(t)$ ,  $g'(t) > 0$ ,  $h'(t) > 0$  と仮定する。

$\tau(t) = h(g^{-1}(t))$  とおき、微分作用素  $L_n$  を次のように定義する:

$$L_n = \frac{1}{p_n(t)} \frac{d}{dt} \frac{1}{p_{n-1}(\tau(t)) \tau'(t)} \frac{d}{dt} \cdots \frac{d}{dt} \frac{1}{p_1(\tau(t)) \tau'(t)} \frac{d}{dt} \frac{1}{p_0(\tau(t))}.$$

(i) 方程式

$$L_n x(t) + F(t, x(g(t))) = 0$$

が性質 A を持つならば、方程式

$$L_n x(t) + F(t, x(h(t))) = 0$$

は性質 A を持つ。

(ii) 方程式

$$L_n x(t) - F(t, x(g(t))) = 0$$

が性質 B を持つならば、方程式

$$L_n x(t) - F(t, x(h(t))) = 0$$

は性質 B を持つ。

§6. deviating arguments に大小関係がない場合の比較

最近, Brands <sup>[1]</sup> は,  $g_1(t) - g_2(t)$  が有界の場合, 二つの方程式

$x''(t) + F(t, x(g_1(t))) = 0$  と  $x''(t) + F(t, x(g_2(t))) = 0$  は同じ振動性を持つという興味深い結果を得た。この結果は Foster and Grimmer [2] によって、高階の方程式

$$x^{(n)}(t) + F(t, x(g_1(t))) = 0 \quad \text{と} \quad x^{(n)}(t) + F(t, x(g_2(t))) = 0$$

に拡張された。これからさらに一般の微分作用素  $L_n$  を含む方程式に拡張されるのではないだろうか、と予想の下に筆者は計算を試みたが、満足すべき段階には到達していない。ここでは定理 5 を用いて証明ができる結果を一つ述べておく。

定理 6.  $p_i(t)$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ , は単調非増加とする。  $g_1(t), g_2(t)$  は連続で  $\lim_{t \rightarrow \infty} g_i(t) = \infty$ ,  $i=1, 2$ , かつ  $|g_1(t) - g(t)|, |g_2(t) - g(t)|$  が有界であるような  $C^1$  関数  $g(t)$  ( $g'(t) > 0$ ) が存在すると仮定する。

(i) 方程式

$$L_n x(t) + F(t, x(g_1(t))) = 0$$

が性質 A を持つのは、方程式

$$L_n x(t) + F(t, x(g_2(t))) = 0$$

が性質 A を持つとき、しかもそのときに限る。

(ii) 方程式

$$L_n x(t) - F(t, x(g_1(t))) = 0$$

が性質 B を持つのは、方程式

$$L_n x(t) - F(t, x(g_2(t))) = 0$$

が性質 B を持つとき, しかもそのときに限る。

### §7. 外力項がある場合とない場合の比較

この節の目的は,  $n$  が偶数の場合, 方程式  $(L_n^+, F, g)$  の振動性と, これに外力項  $\varphi(t)$  を付け加えた方程式

$$(L_n^+, F, g, \varphi) \quad L_n x(t) + F(t, x(g(t))) = \varphi(t)$$

の振動性の比較を行うことである。主要結果は次の通りである。

定理 7.  $L_n, F, g$  は §1 の条件を満たすものとし,  $\varphi: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  は連続とする。さらに, 次の条件を満たす関数  $v, w \in \mathcal{A}(L_n)$  が存在すると仮定する:

$$\begin{aligned} L_n v(t) &= \varphi(t), & \liminf_{t \rightarrow \infty} D^0(v; p_0)(t) &= 0, & v(t) \text{ は振動または負,} \\ L_n w(t) &= \varphi(t), & \limsup_{t \rightarrow \infty} D^0(w; p_0)(t) &= 0, & w(t) \text{ は振動または正.} \end{aligned}$$

このとき, もし方程式  $(L_n^+, F, g)$  が振動ならば, 方程式  $(L_n^+, F, g, \varphi)$  も振動である。

注意. この定理は,  $L_n = d^n/dt^n$  の場合に対する Kartsatos [3, 4] の結果と McCann [12] の結果を本質的に拡張したものである。

定理 8.  $L_n, F, g, \varphi$  は上と同様とする。条件

$$L_n u(t) = \varphi(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} D^0(u; p_0)(t) = 0$$

を満たす関数  $u \in \mathcal{A}(L_n)$  が存在し,  $u(t)$  は振動であるとする。

このとき、方程式  $(L_n^+, F, g, \varphi)$  が振動であるのは、方程式  $(L_n^+, F, g)$  が振動であるとき、しかもそのときに限る。

これらの事実の証明には、次の補題が重要な役割を果たす。

補題 6.  $L_n, M_n, F, G, g$  は §1 の条件を満たし、

$$p_i(t) \geq q_i(t), \quad 0 \leq i \leq n; \quad F(t, x) \operatorname{sgn} x \geq G(t, x) \operatorname{sgn} x$$

が成立つと仮定する。  $\varphi, \psi: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  は連続で、次の条件を満たす関数  $v \in \mathcal{S}(L_n), w \in \mathcal{S}(M_n)$  が存在すると仮定する:

$$L_n v(t) = \varphi(t), \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} D^0(v; p_0)(t) = 0,$$

$$M_n w(t) = \psi(t), \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} D^0(w; q_0)(t) = 0,$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} [D^0(v; p_0)(t) - D^0(w; q_0)(t)] = 0.$$

このとき、もし方程式  $(L_n^+, F, g, \varphi)$  が  $\liminf_{t \rightarrow \infty} D^0(x; p_0)(t) > 0$  を満たす解を持つならば、方程式  $(M_n^+, G, g, \psi)$  は  $\liminf_{t \rightarrow \infty} D^0(x; q_0)(t) > 0$  を満たす解を持つ。(詳細は Kusano and Naito [11] 参照)

## §8. 性質 C に関する比較定理.

方程式  $(L_n^\pm, F, g), (M_n^\pm, G, h)$  に対する性質 C に関して、次の比較定理が成立つ。

定理 9.  $L_n, M_n, F, G, g, h$  は §1 の条件を満たすとし、

さらに次の仮定をおく:

$$g(t) \leq h(t) < t$$

$$p_0(g(t)) \geq q_0(h(t))$$

$$p_i(t) \geq q_i(t), \quad 1 \leq i \leq n.$$



$$F(t, x) \operatorname{sgn} x \geq G(t, x) \operatorname{sgn} x$$

このとき、方程式  $(M_n^\pm, G, h)$  が性質  $C$  を持つとは、方程式  $(L_n^\pm, F, g)$  は性質  $C$  を持つ。

証明  $\alpha$  仮定より。方程式  $(L_n^\pm, F, g)$  が性質  $C$  を持つとはないと仮定する。この方程式に対して  $N_0 \neq \emptyset$  である。  $x \in N_0$  とする。  $t$  が十分大きいとき  $x(t) > 0$  と仮定してよい。補題 2 によつて

$$D^0(x; p_0)(t) \geq c + \int_t^\infty I_{n-1}(r, t; p_{n-1}, \dots, p_1) p_n(r) F(r, x(g(r))) dr$$

が十分大きい  $t$  に対して成立つ。ここで  $c = \lim_{t \rightarrow \infty} D^0(x; p_0)(t) \geq 0$ 。定理の仮定を用いるのは、次の不等式が得られる：

$$D^0(x; p_0)(t) \geq c + \int_t^\infty I_{n-1}(r, t; q_{n-1}, \dots, q_1) q_n(r) G(r, q_0(h(r)) \times D^0(x; p_0)(h(r))) dr$$

補題 3 の (ii) と  $h(t) < t$  の条件を用いて、積分方程式

$$y(t) = c + \int_t^\infty I_{n-1}(r, t; q_{n-1}, \dots, q_1) q_n(r) G(r, q_0(h(r)) y(h(r))) dr$$

に正の解  $y(t)$  が存在することゝ示される。  $z(t) = q_0(t) y(t)$  とおけば、この  $z(t)$  は方程式  $(M_n^\pm, G, h)$  の degree 0 の解になる。  
 (b) これは不合理である。 //

線型方程式に対する性質  $C$  から、非線型方程式に対する性質  $C$  を導き出す一つの原理を挙げよう。

定理 10. ある正数  $\lambda > 0$  に対して方程式

$$L_n x(t) + (-1)^{n+1} \lambda \alpha(t) x(g(t)) = 0$$

が性質 C を持つとする。ただし  $\alpha: [a, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  は連続。

$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は連続,  $x F(x) > 0$  ( $x \neq 0$ ) が

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{|F(x)|} = 0$$

が成立つと仮定する。  $\limsup_{t \rightarrow \infty} p_0(t) < \infty$  ならば, 方程式

$$L_n x(t) + (-1)^{n+1} \mu \alpha(t) F(x(g(t))) = 0$$

は任意の正数  $\mu > 0$  に対して性質 C を持つ。

例 4. Koplatadze and Canturija [6] は,  $g(t) < t$  を,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{g(t)}^t [s - g(t)]^p [g(t) - g(s)]^{n-p-1} \alpha(s) ds > p! (n-p-1)!$$

となる整数  $p$  ( $0 \leq p \leq n-1$ ) がなければ, 方程式

$$x^{(n)}(t) + (-1)^{n+1} \alpha(t) x(g(t)) = 0$$

に対して  $N_0 = \emptyset$  が成立つことを示した。この事実と定理 10

を用いると,  $g(t) < t$  を,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{g(t)}^t [s - g(t)]^p [g(t) - g(s)]^{n-p-1} \alpha(s) ds > 0$$

となる整数  $p$  ( $0 \leq p \leq n-1$ ) がなければ, 方程式

$$x^{(n)}(t) + (-1)^{n+1} \alpha(t) x^\gamma(g(t)) = 0 \quad (0 < \gamma < 1, \gamma \text{ は奇数の比})$$

に対して  $N_0 = \emptyset$  が成立つことが分る。(論文 [10] 参照)

## 参 考 文 献

1. J. J. A. M. Brands, Oscillation theorems for second-order functional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 63(1978), 54-64.
2. K. E. Foster and R. C. Grimmer, Nonoscillatory solutions of higher order delay equations, to appear.
3. A. G. Kartsatos, On the maintenance of oscillations of nth order equations under the effect of a small forcing term, J. Differential Equations 10(1971), 355-363.
4. A. G. Kartsatos, Maintenance of oscillations under the effect of a periodic forcing term, Proc. Amer. Math. Soc. 33(1972), 377-383.
5. Y. Kitamura and T. Kusano, Nonlinear oscillation of higher-order functional differential equations with deviating arguments, to appear in J. Math. Anal. Appl.
6. R. G. Koplatadze and T. A. Canturiya, On the oscillatory properties of differential equations with deviating arguments, Tbilisi State Univ., 1977. (Russian)
7. K. Kreith, T. Kusano and M. Naito, Oscillation criteria for weakly superlinear differential equations of even order, J. Differential Equations (to appear).
8. T. Kusano and M. Naito, Oscillation criteria for a general linear ordinary differential equation, submitted for publication.
9. T. Kusano and M. Naito, Comparison theorem for functional differential equations with deviating arguments, submitted for publication.
10. T. Kusano and M. Naito, Oscillation theorems of comparison type for nonlinear differential equations with deviating arguments, in preparation.
11. T. Kusano and M. Naito, Oscillation theory for perturbed ordinary differential equations with application to partial differential equations, in preparation.
12. R. C. McCann, On the oscillation of solutions of forced even order nonlinear differential equations, to appear in Hiroshima Math. J.